Coordenação de Armindo Rodrigues

Aplicada, Pura, Fundamental, Discreta

Autoras:
Margarida Raposo
Ana Paula Garrão

Investigação Fundamental em Matemática: *a Matemática pela Matemática?*

A distinção entre investigação em Matemática fundamental (comummente designada por Matemática pura) e em Matemática aplicada suscita, desde sempre, opiniões divergentes, quer entre os matemáticos quer na sociedade em geral. No que respeita à Matemática pura, o conceito central está na ideia de generalidade, sendo a busca desinteressada do saber a principal motivação para a sua investigação, não havendo, necessariamente, uma preocupação com uma possível aplicação quer em outras áreas do conhecimento quer em produtos de grande alcance social. No entanto, muitas destas aplicações e produtos empregam resultados da investigação pura, não raras vezes, passadas décadas, ou mesmo séculos.

Um exemplo interessante é o do matemático Godfrey Harold Hardy (1887-1947) (Figura 1), grande defensor da matemática pura, que considerava que todo o valor de um resultado matemático é interno à própria matemática, independentemente de eventuais aplicações, tendo uma visão restritiva da utilidade da Ciência centrada na sua aplicabilidade a questões práticas da vida corrente, chegando mesmo a afirmar no seu livro "A mathematican´s apology", originalmente publicado em 1940 , altura em que a sua criatividade diminuíra bastante devido a ter problemas de saúde:

"*Nunca fiz nada de "útil". Nenhuma descoberta minha fez, ou é suscetível de vir a fazer, direta ou indiretamente, para o bem ou para o mal, a menor diferença para a amenidade do mundo.*"

Curiosamente, Hardy, tendo-se dedicado sobretudo à Análise Matemática, trabalhou também em Teoria dos Números, que considerava tão "inútil" como, por exemplo, a Relatividade e a Mecânica Quântica, que, como todos sabemos, têm significativas aplicações hoje em dia. Em particular, a Teoria dos Números está na base do sistema de criptografia de chave pública RSA, descrito em 1978, que é amplamente utilizado para a transmissão segura de dados.

O processo de criação matemática consiste na investigação de diferentes estruturas abstratas, definidas axiomaticamente, descobrindo relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos.

A Matemática pode, em linhas gerais, ser subdivida em subáreas, sendo a aritmética, a álgebra, a geometria e a análise as mais conhecidas pelo público em geral. Em 1945 foi apresentada, pela primeira vez, por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane (carinhosamente apelidado como o "pai das categorias"), a Teoria das Categorias, teoria matemática que lida de uma maneira abstrata com as estruturas matemáticas e as relações entre elas.

Esta teoria fornece mecanismos abstratos para representar várias estruturas matemáticas, isto é, muitas das suas propriedades podem ser unificadas e simplificadas pela utilização de diagramas e setas (Figura 2). O diagrama em si é uma estrutura matemática chamada de grafo e os nós são objetos matemáticos, como conjuntos, grupos, semigrupos, etc., as setas podem representar funções, morfismos, homomorfismos etc., e são designados por functores. Estes mecanismos tornam possível provar muitos resultados matemáticos de uma maneira mais simples, constituindo, assim, um ambiente consistente para o estudo de diversas áreas da Matemática. A capacidade de generalização, abstração e unificação de teorias é o grande mérito da teoria das categorias.

Recentemente, publicámos, em conjunto com investigadores do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, o artigo *Cancellative conjugation semigroups and monoids*, na Semigroup Forum, revista internacional de investigação matemática com arbitragem científica.

Figura 1. Godfrey Harold Hardy (1887-1947)

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[d, shift right, "l"'] & \\
 & A \times_B C \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, shift right, "p_1"'] & C \arrow[l, shift right, "e_2"'] \arrow[u, dotted, shift right, "q_g"'] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
X \arrow[r, shift right, "k"'] & A \arrow[l, dotted, shift right, "q_f"'] \arrow[u, shift right, "e_1"'] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & B \arrow[l, shift right, "r"'] \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & & & D
\end{tikzcd}
$$

Figura 2. Exemplo de um Diagrama usado em Teoria das Categorias

Nessa publicação introduzimos a categoria *Cancellative conjugation semigroups (S)*, que consiste em todos os semigrupos equipados com uma operação unária, que designamos por conjugação. Mostramos que esta categoria é *weakly Mal'tsev* e damos uma caracterização para a admissibilidade de todos os seus diagramas. Consideramos, ainda, a subcategoria *Cancellative conjugation monoids* de S. Para esta categoria, caracterizamos os morfismos que induzem algumas estruturas internas, tais como *internal reflexive graph, internal category e internal grupoid*.

Este trabalho foi dado a conhecer à comunidade científica da área, na Universidade dos Açores, que teve o privilégio de participar na organização da edição 2018 da *International Conference on Category Theory*, conferência que se realiza, anualmente, em diferentes países. Esta conferência reuniu, em Ponta Delgada, 107 especialistas, de várias nacionalidades, em Teoria das Categorias onde foram apresentados e discutidos resultados recentes da investigação científica neste domínio (Figura 3).

A investigação que temos vindo a desenvolver incide na aplicação da Teoria das Categorias, principalmente na Álgebra; no entanto, podemos referir que a Teoria das Categorias também tem aplicações práticas como, por exemplo, nas ciências da Computação.

Pelo que acabámos de expor, facilmente se concluirá que, tal como as descobertas da investigação fundamental levam à investigação aplicada, por vezes também esta incentiva a investigação fundamental a explorar outros domínios.

Figura 3. Foto de Grupo da *Category Theory Conference* que decorreu em Ponta Delgada

CATEGORY THEORY 2018

Category Theory conference, Ponta Delgada, julho de 2018

Um grupo de investigadores internacionais, incluindo muitos portugueses, dedica-se à investigação em Teoria de Categorias. Este grupo realiza, anualmente e em diferentes países, a *Category Theory conference*. A par de cidades como Vancouver, Halifax, Aveiro, Cambridge, Macquarie, Genova, Cape Town, Calais, em 2018 esta conferência realizou-se em Ponta Delgada, sendo organizada pelo Departamento de Matemática e Estatística da FCT e pelo Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

Coordenação de Armindo Rodrigues